Ex8. 设A 是$n(\geq 2)$ 阶方阵, A^* 是A 的伴随矩阵, 证明:

(1) 若$|A|=0$, 则$|A^*|=0$; (2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明. (1) (反证法证明). 假设$|A^*|\neq 0$, 则由$A^*(A^*)^{-1}=E$ 及$AA^*=|A|E$ 得

$$A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=0.$$

由$A=0$ 知$A^*=0$, 这与$|A^*|\neq 0$ 矛盾. 所以, 当$|A|=0$ 时有$|A^*|=0$.

(2) 由$AA^*=|A|E$ 两边取行列式得到

$$|A||A^*|=||A|E|=|A|^n.$$

若$|A|\neq 0$, 则$|A^*|=|A|^{n-1}$. 若$|A|=0$, 则由(1) 知$|A^*|=0$, 此时结论也成立.